MATeX

Mathematische Aufgaben und Lösungen automatisch generieren

Tobias Bentz, Kevin Rapedius, Vita Rutka

Überblick:

- Unterstützung von Studierenden und Lehrenden bei der Erstellung/Bearbeitung von Aufgaben zu "Standard-Themen" von Mathematik-Anfängervorlesungen.
- Hintergrund: Technische Umsetzung mit **MAT**LAB (bzw. Sagemath) und La**TeX**
- Anwender: **einfach bedienbare Web-App** mit grafischer Benutzeroberfläche, auch auf mobilen Endgeräten nutzbar, ohne Installation, ohne Programmierkenntnisse
- komplette Ausgabe mit **Ergebnis, Lösungsweg und Grafik**
- **Über 30 Themen** aus den Bereichen Grundlagen/Schulmathematik, eindimensionale, mehrdimensionale und höhere Analysis, Differentialgleichungen, Lineare Algebra und Statistik

Vorteile für Studierende:

- gezieltes Üben durch eigene Parameterwahl in Aufgaben
- intensives Üben mit zufallsgenerierten Aufgaben
- Abhängigkeiten von Parametern „spielerisch" entdecken

Vorteile für Lehrende:

- schnelle Erstellung von Standardaufgaben mit eigenen Parametern oder per Zufall
- Flexibilität: Sowohl direkte pdf-Ausgabe als auch editierbare LATeX-Quelldatei mit TikZ-Grafiken
- neue Lehransätze: Einbettung in „peer to peer" Lernansatz, Integration in Aufgabenblätter mittels QR -Code für „unendlich" viele Aufgaben

MATEX

06 Mehrdimensionale Integration: Kurvenintegrale erster Art

Mit zufälligen Parametern starten:

Beschreibung

Berechnet das Integral $\int_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$ über eine Kurve K in 3D mit Parametrisierung $r(t) = [x(t); y(t); z(t)]$, $t \in I = [a,b]$. Es wird auch die entsprechende Kurvenlänge berechnet.
Bitte beachten Sie, dass bei Kurvenintegralen erster Art wegen der Wurzelfunktion es oft zu nicht elementar integrierbaren Integranden kommen kann. In diesem Fall wird nur das Integral als Ergebnis herausgegeben und nicht der Wert.

f(x,y,z): $x^2 + y \cdot z$

r(t): $[cos(t); sin(t); t]$

I: $[0, 4 \cdot \pi]$

Grafik: Ja Nein

absenden

Aufgabe 1. Gegeben seien ein Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + yz$ und eine Kurve γ mit

$$f(x,y,z) = x^2 + yz\,, \quad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0;\, 4\,\pi].$$

a) Bestimmen Sie die Kurvenlänge L_γ.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral von f über γ.

Ergebnis: a) $L_\gamma = 4\sqrt{2}\pi$, b) $\int_\gamma f\,\mathrm{d}s = -2\sqrt{2}\pi$

Lösung: Für beide Teilaufgaben wird die Ableitung von $\vec{\gamma}$, d. h. der Tangentialvektor im Punkt $\vec{\gamma}(t)$, benötigt: $\frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}(t)}{\mathrm{d}t} = (-\sin(t)\,,\, \cos(t)\,,\, 1)$, und ihre Norm lautet

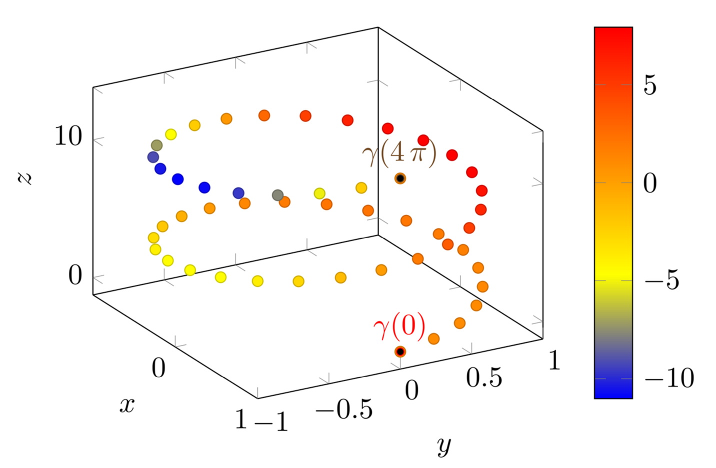
$$\left\| \frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}}{\mathrm{d}t} \right\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2\,(1)^2} = \sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2 + 1}.$$

a) Die Bogenlänge ist

$$L_\gamma = \int_{t=0}^{t=4\pi} \left\| \frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=4\pi} \sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{2}t\right]_{t=0}^{t=4\pi} = 4\sqrt{2}\pi.$$

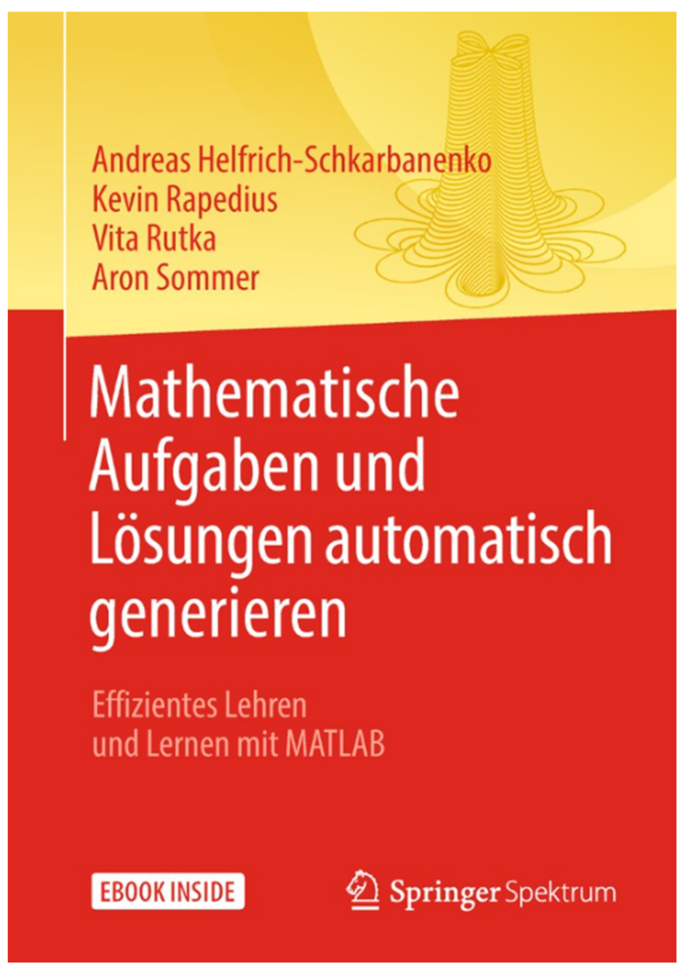
b) Für das Kurvenintegral erster Art erhält man so:

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_{t=0}^{t=4\pi} f(\vec{\gamma}(t)) \left\| \frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{t=4\pi} \left(\cos(t)^2 + t\sin(t)\right) \sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2 + 1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{t=4\pi} \sqrt{2}\cos(t)^2 + \sqrt{2}t\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{2}\sqrt{2}(2\,t\cos(t) - (\cos(t) + 2)\sin(t) - t)\right]_{t=0}^{t=4\pi} = -2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$



Graph der Funktion $f(x,y,z) = x^2 + yz$, eingeschränkt auf die Kurve $\vec{\gamma}$.

Buchveröffentlichung Springer 2018



Quellcode Sagemath

```
Text = aufgaben_umgebung("AufgabenEnde");
Aufgabe.write(Text);

#print('Berechnungen')
# Berechnungen
dr_dt=diff(r,t);

#print('Ber 2')
r_x =vector([1, 0, 0])*r(t);
r_y =vector([0, 1, 0])*r(t);
r_z =vector([0, 0, 1])*r(t);

#print('Ber 3')
dr_x=vector([1, 0, 0])*dr_dt;
dr_y=vector([0, 1, 0])*dr_dt;
dr_z=vector([0, 0, 1])*dr_dt;

#print('Ber 4')
Integrand(t)=f(r_x,r_y,r_z)*norm(dr_dt);

#print('Ber 5')
```

Generiertes LATeX

```
\begin{aufgabe}
 Gegeben seien ein Skalarfeld
$f\colon \mathbb R^3 \rightarrow\mathbb R$,
$f(x,y,z)= x^{2} + y z $
und eine Kurve $\gamma$ mit
\[ f(x,y,z)= x^{2} + y z \,\quad \vec\gamma(t)= \left( \begin{array}{c} \cos\left(t\right) \\ \sin\left(t\right) \\ t
\end{array}\right) ,\quad t \in [ 0 ;\, 4 \, \pi ]. \]
\begin{itemize}
\item[a)] Bestimmen Sie die Kurvenl\"ange $L_\gamma$.
\item[b)] Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f$ \"uber $\gamma$.
 \end{itemize}

\end{aufgabe}

\begin{ergebnis}
a) $L_\gamma= 4 \, \sqrt{2} \pi $, b)$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s= -2 \, \sqrt{2} \pi $
\end{ergebnis}

\ifLoesung
\begin{loesung}
F\"ur beide Teilaufgaben wird die Ableitung von $\vec\gamma$, {d.\,h.} der Tangentialvektor im Punkt $
\vec\gamma(t)$, ben\"otigt:
$\displaystyle{\frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}(t)}{\mathrm{d}t}= \left(-\sin\left(t\right),\,\cos\left(t\right),\,1\right) }
$, und ihre Norm lautet
\begin{equation*}
 \left\Vert \frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}}{\mathrm{d}t}\right\Vert
=\sqrt{\left( -\sin\left(t\right) \right)^2+\left( \cos\left(t\right) \right)^2 \left( 1 \right)^2}
= \sqrt{\cos\left(t\right)^{2} + \sin\left(t\right)^{2} + 1} .
\end{equation*}
```

Quellcode MATLAB

```
Int_r_nrm_wert = expand(int(r_nrm,t,I(1),I(2)));% die logarithmen sollten nicht zusammengefasst werden
Stammfunktion= int(Integrand,t);
Stammfunktion= expand(Stammfunktion);
Integralwert = int(Integrand,t,I(1),I(2));
Integralwert = expand(Integralwert); % die logarithmen sollten nicht zusammengefasst werden!

%% Ergebnisangabe

append_content(fID,'.... \n '); %Ab dieser Zeile wird spter das Ergebnis in die LATeX-Datei eingefgt.

stamm_char = char(Stammfunktion);

if strfind(stamm_char,'int')
    % integral k\"onnte nicht berechnet werden
    integrierbar = false;
else
    integrierbar = true;
end

if integrierbar
    ErgText= ['a) $L_\gamma=',sym2latex(Int_r_nrm_wert),'$, b)$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s=',sym2latex(
else
    ErgText= ['a) $L_\gamma=',sym2latex(Int_r_nrm_wert),'$, b) kann nicht berechnet werden' ];
```

Team

Initiator: Prof. Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko (jetzt HS Karlsruhe)

Matlab: Prof. Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko, Dr. Aron Sommer, Dr. Kevin Rapedius, Dr. Vita Rutka

Sagemath: Dr. Kevin Rapedius, Dr. Vita Rutka

Webentwicklung: Dr. Tobias Bentz

Koordination: Dr. Tobias Bentz, M.A. Andrea Nitsche

Dank an: Dipl-Math. Rainer Koss, Dr. Timo Essig, Dr. Daniel Haase, Dipl.-Inf. Anke Mäkiö,