Karlsruher Institut für Technologie

MINT-KOLLEG BADEN-WÜRTTEMBERG

Wegweiser durch die Mathematik

Eine Buchreihe aus dem MINT-Kolleg

R. Koß, *S. Feiler*, J. Liedtke, L. Bitzer, T. Essig, *M. Marz*, *K. Rapedius*, V. Rutka

Grundlegende Zusammenhänge

C Binomischer Satz

Fakultät und Binomialkoeffizienten

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ wird die ***Fakultät*** $n!$ für $n \geq 1$ durch

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad \text{sowie} \quad 0! := 1$$

definiert und

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

der ***Binomialkoeffizient*** „n über k“ genannt.

Hinweis: Es gilt $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{n} = 1$.

Beispiele: Beispielsweise sind

- $2! = 1 \cdot 2 = 2$,
- $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ und
- $\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2)} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 5}{1} = 10$. ■

Bemerkung: In der ***Kombinatorik*** befasst man sich mit der Frage, wie viele Möglichkeiten es für ein bestimmtes Auswahlverfahren gibt. Dort wird gezeigt, dass die Zahl $\binom{n}{k}$ die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge angibt. Somit ist $\binom{n}{k}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ stets eine natürliche Zahl.

Mit den oben eingeführten Bezeichnungen kann eine Verallgemeinerung der ersten beiden binomischen Formeln auf eine beliebige Potenz $n \in \mathbb{N}_0$ einfach aufgeschrieben werden. Die Aussage wird ***allgemeine binomische Formel***, ***binomischer Lehrsatz*** oder schlicht ***binomischer Satz*** genannt.

Binomischer Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sowie alle reelle Zahlen a und b gilt

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot ab^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

Definitionen
in roten Boxen

Mathematische
Zusammenhänge
in blauen Boxen

Angereichert durch
Kurzbeispiele

Methoden und Beispiele

B Umentwickeln eines Polynoms

Die Entwicklung eines Polynoms um $\xi \in \mathbb{R}$ erhält man, indem man die additive Darstellung eines verschobenen Polynoms berechnet.

Umentwickeln von Polynomen

Um ein in der Variablen x gegebenes Polynom p um $\xi \in \mathbb{R}$ zu entwickeln, setzt man $x = (t + \xi)$ in das Polynom ein und berechnet die additive Darstellung des Polynoms in der Variablen t. Dabei ergibt sich als Koeffizient von t^k der Vorfaktor $b_{k,\xi}$ aus der Entwicklung von p um ξ.

Die Methode funktioniert auch bei nicht in einer Standard-Darstellung gegebenen Polynomfunktionen.

Beispiel: Umentwickeln

Entwickeln Sie $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\quad x \mapsto p(x) := 2x^3 + (x-2) \cdot (x+1) - 3x \quad$ um $\xi := 2$.

Lösung: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt wegen $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\begin{aligned} p(t+2) &= 2 \cdot (t+2)^3 + \big((t+2) - 2\big) \cdot \big((t+2) + 1\big) - 3 \cdot (t+2) \\ &= 2 \cdot \big(t^3 + 6t^2 + 12t + 8\big) + t \cdot (t+3) - 3t - 6 \\ &= 2t^3 + 12t^2 + 24t + 16 + t^2 + 3t - 3t - 6 \\ &= 2t^3 + 13t^2 + 24t + 10. \end{aligned}$$

Mit $t := x - 2$ ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$ die Entwicklung von p um 2 zu

$$p(x) = 2 \cdot (x-2)^3 + 13 \cdot (x-2)^2 + 24 \cdot (x-2) + 10. \quad ■$$

Methoden
in grünen Boxen

Vollständig
durchgerechnete
Beispiele in
orangenen Boxen

Tipps und Tricks

A Die Tunnelbohrmethode

Für manche Induktionen bietet sich im Induktionsschritt die *Tunnelbohrmethode* an:

Da die zu beweisende Aussage $A(N+1)$ bekannt ist, kann man bei Summen und Produktformeln, Ungleichungen oder Ähnlichem die linke und die rechte Seite der Aussage notieren und dann — ausgehend von beiden Seiten — Termumformungen oder Abschätzungen vornehmen, bis sich die beiden Terme in der Mitte treffen. Auf diese Art werden auch manchmal Tunnel gebohrt: Statt nur von einer Seite zu Bohren, bewegen sich zwei Bohrer von beiden Seiten aufeinander zu.

In der alternativen Darstellung des Induktionsschritts zum Beispiel „Summenformeln mit dem Summenzeichen“ wurde die Tunnelbohrmethode bereits angewandt.

B Abkürzungen einführen

Substitutionen in (Un-)Gleichungen

In einigen (Un-)Gleichungen ist es eventuell einfacher, die zu Grunde liegende Struktur zu erkennen, wenn man eine *Abkürzung für bestimmte Terme* einführt.
Nachdem man dann die Lösungen der transformierten (Un-)Gleichung gefunden hat, kommt man mit Hilfe einer *Rücksubstitution* zurück zu den Lösungen der Ursprungs(un-)gleichung.

Exponential(un-)gleichungen lassen sich zum Beispiel manchmal durch eine Substitution auf quadratische (Un-)Gleichungen transformieren:

Beispiel: Substitution

Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die folgende Ungleichung erfüllen:

$$4^x + 8 \leq 9 \cdot 2^x.$$

Lösung: Mit den Potenzgesetzen erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$ die Termumformung

$$4^x = \left(2^2\right)^x = 2^{2x} = (2^x)^2.$$

Mit der Substitution $\quad t := 2^x \quad$ erkennen wir also, dass es sich bei

Alternative
Lösungsmethoden

Weiterführende
Ansätze

Kleine „Hacks“

Mal mit,
mal ohne Boxen

Typische Fehlerquellen

E Grenze beim Abspalten eines Summanden nicht einsetzen

Möchte man den letzten Summanden einer Summe abspalten, so darf man nicht nur die obere Grenze zur Rest-Summe addieren. Die obere Grenze muss in die Vorschrift zur Bildung der Summanden eingesetzt werden.

Beispiel: Es gilt also

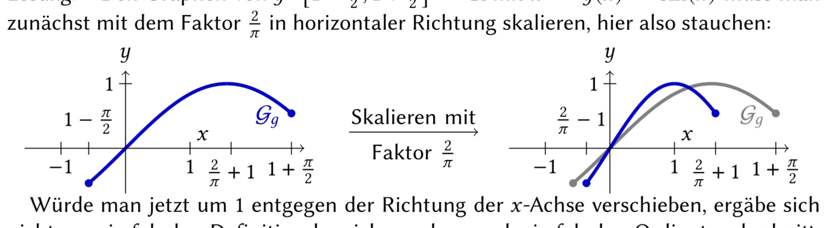
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^k}{k!} \neq (n+1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^k}{k!}, \qquad \text{sondern} \qquad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^k}{k!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^k}{k!}. \quad ■$$

D *a* nicht ausklammern

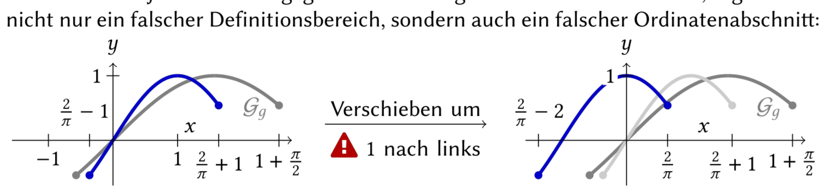
Wird horizontal skaliert und verschoben, so muss das Argument in der Form $a \cdot \left(x + \frac{b}{a}\right)$ geschrieben werden. Nur so führt die Verschiebung zum gewünschten Ergebnis.

Beispiel: Zeichnen Sie den Graphen von $f\colon [-1;1] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \sin\left(\frac{\pi x}{2} + 1\right)$.

Lösung: Den Graphen von $g\colon \left[1 - \frac{\pi}{2}; 1 + \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := \sin(x)$ muss man zunächst mit dem Faktor $\frac{2}{\pi}$ in horizontaler Richtung skalieren, hier also stauchen:



Würde man jetzt um 1 entgegen der Richtung der x-Achse verschieben, ergäbe sich nicht nur ein falscher Definitionsbereich, sondern auch ein falscher Ordinatenabschnitt:

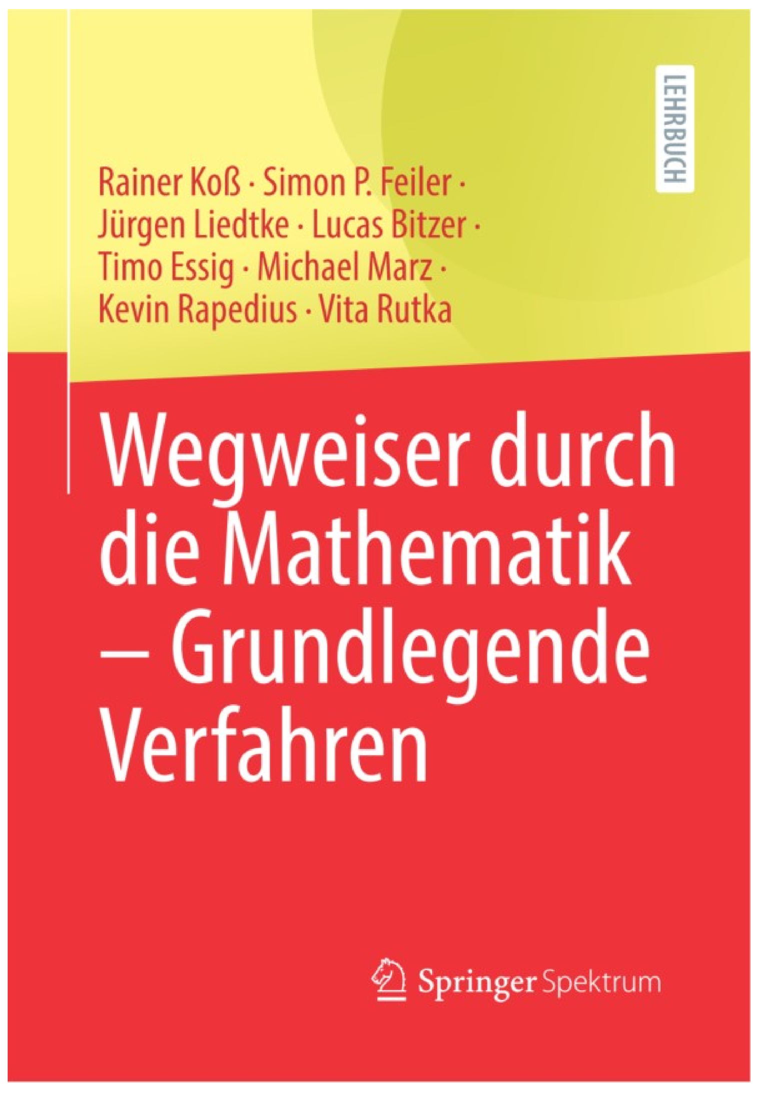


Tatsächlich ist $f(0) = \sin(1) \neq 1$. Wegen $\frac{\pi x}{2} + 1 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(x + \frac{2}{\pi}\right)$ muss der nach dem Skalieren erhaltene Graph um $\frac{2}{\pi}$ nach links verschoben werden. ■

Häufig auftretende
Fehler

Didaktisch aufbereitet,
so dass sich nichts
Falsches einprägt

Immer mit korrekter
Vorgehensweise



Bände der Reihe:

Grundlegende Verfahren *(erschienen 2024)*

Analytische Verfahren in einer Variablen *(in Arbeit)*

Geplant:

Analytische Verfahren in mehreren Variablen

Verfahren der Vektorgeometrie und Matrizenrechnung

Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen

Weitere Verfahren