Dynamische Visualisierungen in der Studieneingangsphase - Chancen und Gefahren der Anschauung

Wieland Wilzek 20.03.2018

Einordnung in die Projektstruktur

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Maßnahmen des Teilprojekts MINTroduce:

- Vorkurse
- E-Learning
- Lern- und Diskussionszentren
- Repetitorien
- Flex-Studium
- …

Bildungsgerechtigkeit im Fokus

Ein Qualitätspakt-Lehre-Vorhaben der Universität Duisburg Essen

Unter dem FKZ 01PL16075

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

mintroduce

Fit fürs Studium

S.65 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Auf S. 65 im Skript werden zwei verschiedene Konvergenzbegriffe gegenübergestellt. Die punktweise Konvergenz ist wie folgt definiert:
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen, die jeweils von D nach $\mathbb{C}$ abbilden und es existiert die Funktion, die für alle $x \in D$ durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

definiert ist, so heißt die Folge *punktweise konvergent*.
Mit anderen Worten konvergieren die Funktionswerte der Folge an jeder einzelnen Stelle gegen den Funktionswert der Grenzfunktion.

Bei der gleichmäßigen Konvergenz ist diese stellenweise Betrachtung aufgehoben. Eine Funktionenfolge wie oben heißt *gleichmäßig konvergent*, wenn eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft existiert:

$$\lim_{n\to\infty}(sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in D\}) = 0$$

Mit anderen Worten muss der größte Abstand zwischen der n-ten Funktion der Folge und der Grenzfunktion bei wachsendem Index beliebig klein werden.

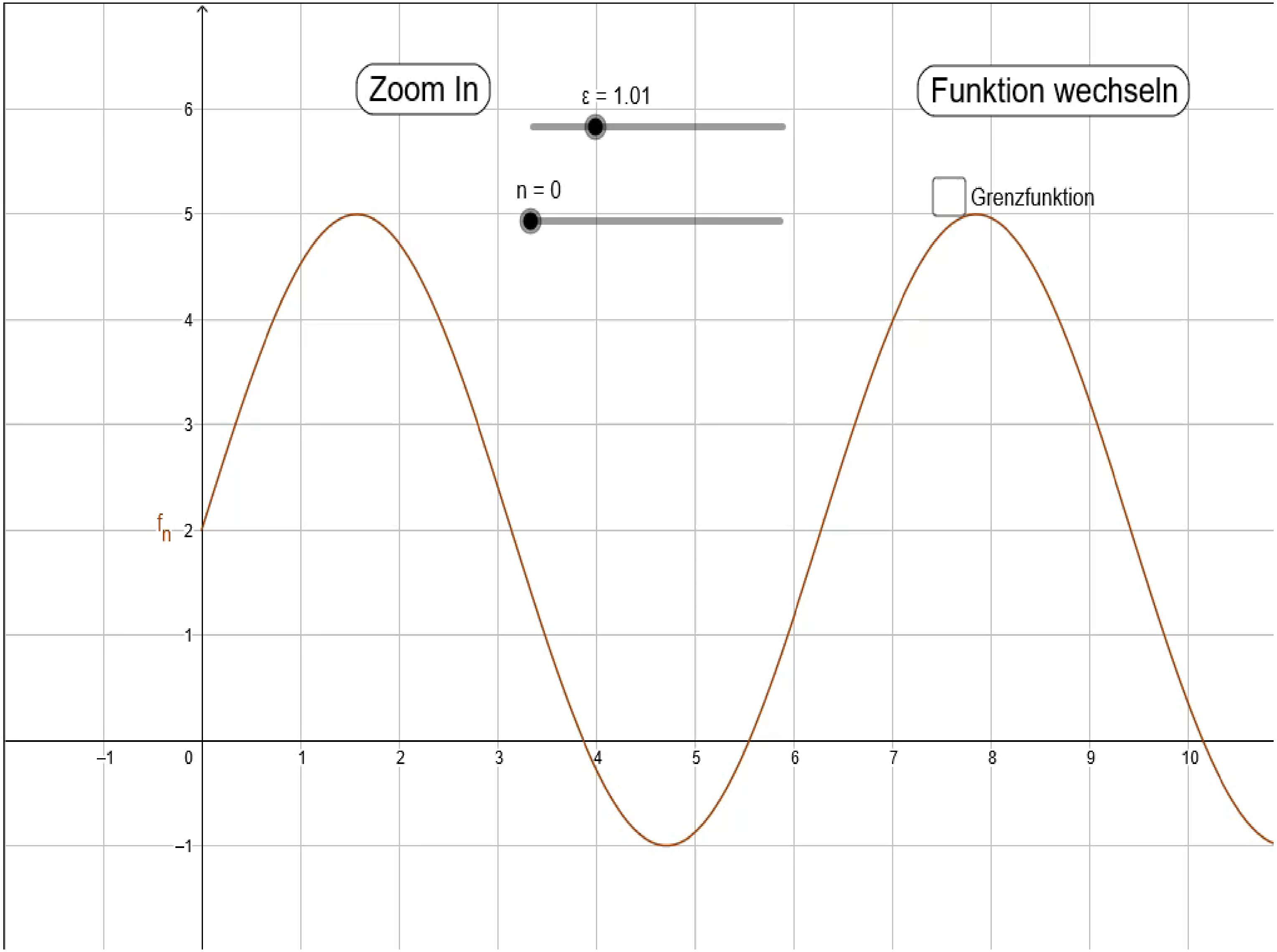
In der Visualisierung können zwei verschiedene Folgen betrachtet werden. $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) := \frac{n+3}{n+1} sin(x) + 2$ und $g_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $g_n(x) := \frac{2}{(x+1)^n} + 1$. Beide Funktionenfolgen sind punktweise konvergent und die entsprechende Grenzfunktion lässt sich ein- und ausblenden. Blendet man die Grenzfunktion ein, wird auch ein "Epsilonschlauch" angezeigt, mit dessen Hilfe man den Abstand zur Grenzfunktion bestimmen kann.

Reflexionsanregungen und Arbeitsaufträge:

- Versuchen Sie zunächst, die Grenzfunktion durch Betrachten immer größerer Indizes zu ermitteln.
- Warum ist die Grenzfunktion bei der punktweisen Konvergenz der einzige Kandidat für eine Funktion gegen die die Folge auch gleichmäßig konvergieren kann?
- Überprüfen Sie nun mit eingeblendeter Grenzfunktion zu ermitteln, ob die Funktionenfolgen auch gleichmäßig konvergieren. (Wie verändert sich der größte Abstand, wenn der Index wächst?)
- Scheinbar liegt im Falle der gleichmäßigen Konvergenz die gesamte Funktion ab einen kritischen Index im vorgegebenen „Epsilonschlauch". Versuchen Sie zu begründen, warum man gleichmäßige Konvergenz auch durch die folgende Definition beschreiben kann:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{R}$, sodass $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in D$ und alle $n > N$.

Dynamische Visualisierungen – ein Beispiel



Chancen

- Abschwächung des Übergangs von der inhaltlichen Begriffsbildung in der Schule zu der formal-abstrakten Axiomatik der Hochschule

Chancen

- Abschwächung des Übergangs von der inhaltlichen Begriffsbildung in der Schule zu der formal-abstrakten Axiomatik der Hochschule

→ Soll aber über schulmathematische Betrachtungen hinaus gehen

Chancen

- Abschwächung des Übergangs von der inhaltlichen Begriffsbildung in der Schule zu der formal-abstrakten Axiomatik der Hochschule

→ Soll aber über schulmathematische Betrachtungen hinaus gehen

- Anreicherung des Concept-Images (Tall & Vinner, 1981)

Chancen

- Abschwächung des Übergangs von der inhaltlichen Begriffsbildung in der Schule zu der formal-abstrakten Axiomatik der Hochschule

→ Soll aber über schulmathematische Betrachtungen hinaus gehen

- Anreicherung des Concept-Images (Tall & Vinner, 1981)
- Funktionale Zugänge ermöglichen (Schwank, 2003)

Chancen

- Abschwächung des Übergangs von der inhaltlichen Begriffsbildung in der Schule zu der formal-abstrakten Axiomatik der Hochschule

→ Soll aber über schulmathematische Betrachtungen hinaus gehen

- Anreicherung des Concept-Images (Tall & Vinner, 1981)
- Funktionale Zugänge ermöglichen (Schwank, 2003)
- Verschiedene Funktionen der Anschauung (Volkert, 1986): Erkenntisleitende Funktion kann beim Problemlösen Hilfe sein

Chancen

- Abschwächung des Übergangs von der inhaltlichen Begriffsbildung in der Schule zu der formal-abstrakten Axiomatik der Hochschule

→ Soll aber über schulmathematische Betrachtungen hinaus gehen

- Anreicherung des Concept-Images (Tall & Vinner, 1981)
- Funktionale Zugänge ermöglichen (Schwank, 2003)
- Verschiedene Funktionen der Anschauung (Volkert, 1986): Erkenntisleitende Funktion kann beim Problemlösen Hilfe sein
- Anschauung als mnemotechnische Stütze

Chancen

- Abschwächung des Übergangs von der inhaltlichen Begriffsbildung in der Schule zu der formal-abstrakten Axiomatik der Hochschule

→ Soll aber über schulmathematische Betrachtungen hinaus gehen

- Anreicherung des Concept-Images (Tall & Vinner, 1981)
- Funktionale Zugänge ermöglichen (Schwank, 2003)
- Verschiedene Funktionen der Anschauung (Volkert, 1986): Erkenntisleitende Funktion kann beim Problemlösen Hilfe sein
- Anschauung als mnemotechnische Stütze
- Anschaulichkeit wird von Lehramtsanwärtern gewünscht (Buchholtz & Behrens, 2014)

Gefahren

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

- Michaels (1983) Kritik an Veranschaulichungen:
  - Irreführung durch Wahl inadäquater Veranschaulichung („nur aufrechtstehende gleichschenklige Dreiecke werden erkannt“)
  - Inaktivierung durch Überangebote
  - Gefahr der Verselbstständigung der Veranschaulichungen („Modelle für die Wirklichkeit halten“)

Gefahren

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

- Michaels (1983) Kritik an Veranschaulichungen:
  - Irreführung durch Wahl inadäquater Veranschaulichung („nur aufrechtstehende gleichschenklige Dreiecke werden erkannt“)
  - Inaktivierung durch Überangebote
  - Gefahr der Verselbstständigung der Veranschaulichungen („Modelle für die Wirklichkeit halten“)
- Pinkernell (2014): Studierende deuten Schaar-Parameter bei Untersuchung mit GTR falsch

Gefahren

- Michaels (1983) Kritik an Veranschaulichungen:
  - Irreführung durch Wahl inadäquater Veranschaulichung („nur aufrechtstehende gleichschenklige Dreiecke werden erkannt“)
  - Inaktivierung durch Überangebote
  - Gefahr der Verselbstständigung der Veranschaulichungen („Modelle für die Wirklichkeit halten“)
- Pinkernell (2014): Studierende deuten Schaar-Parameter bei Untersuchung mit GTR falsch

→ Eigenes Dissertationsvorhaben: Auswirkungen auf das Begriffsverständnis und die Art Beweise zu führen

Gefahren

- Michaels (1983) Kritik an Veranschaulichungen:
    - Irreführung durch Wahl inadäquater Veranschaulichung („nur aufrechtstehende gleichschenklige Dreiecke werden erkannt“)
    - Inaktivierung durch Überangebote
    - Gefahr der Verselbstständigung der Veranschaulichungen („Modelle für die Wirklichkeit halten“)
- Pinkernell (2014): Studierende deuten Schar-Parameter bei Untersuchung mit GTR falsch

→ Eigenes Dissertationsvorhaben: Auswirkungen auf das Begriffsverständnis und die Art Beweise zu führen

- Akzeptanz von Anschauung bei Mathematikern unterschiedlich

→ Dreyfus (1994) behauptet aber, kein Mathematiker komme ohne Anschauung aus, in Publikationen wird dies nur verfälscht

Didaktische Anregungen

- Blinder Aktivismus (Weigand & Weth, 2002)

→ Reflexionsanregungen und Arbeitsaufträge → Lernprozess entschleunigen

Didaktische Anregungen

- Blinder Aktivismus (Weigand & Weth, 2002)

→ Reflexionsanregungen und Arbeitsaufträge → Lernprozess entschleunigen

- Zuviel Text kann abschreckend wirken

→ Bedienung intuitiv gestalten und Erläuterungen dazu nach und nach reduzieren.

Didaktische Anregungen

- Blinder Aktivismus (Weigand & Weth, 2002)

→ Reflexionsanregungen und Arbeitsaufträge → Lernprozess entschleunigen

- Zuviel Text kann abschreckend wirken

→ Bedienung intuitiv gestalten und Erläuterungen dazu nach und nach reduzieren.

- Verbindungen zwischen anschaulicher und formaler Ebene müssen hergestellt werden

→ Keine einseitige Positionierung auf dem Kontinuum zwischen Werkzeug- und Fachsprache

Didaktische Anregungen

- Blinder Aktivismus (Weigand & Weth, 2002)

→ Reflexionsanregungen und Arbeitsaufträge → Lernprozess entschleunigen

- Zuviel Text kann abschreckend wirken

→ Bedienung intuitiv gestalten und Erläuterungen dazu nach und nach reduzieren.

- Verbindungen zwischen anschaulicher und formaler Ebene müssen hergestellt werden

→ Keine einseitige Positionierung auf dem Kontinuum zwischen Werkzeug- und Fachsprache

- Manche Visualisierungen verfälschen das Wesentliche → Monster (Lakatos, 1979)

→ Das Versagen der Anschauung bewusst reflektieren

Didaktische Anregungen

- Blinder Aktivismus (Weigand & Weth, 2002)

→ Reflexionsanregungen und Arbeitsaufträge → Lernprozess entschleunigen

- Zuviel Text kann abschreckend wirken

→ Bedienung intuitiv gestalten und Erläuterungen dazu nach und nach reduzieren.

- Verbindungen zwischen anschaulicher und formaler Ebene müssen hergestellt werden

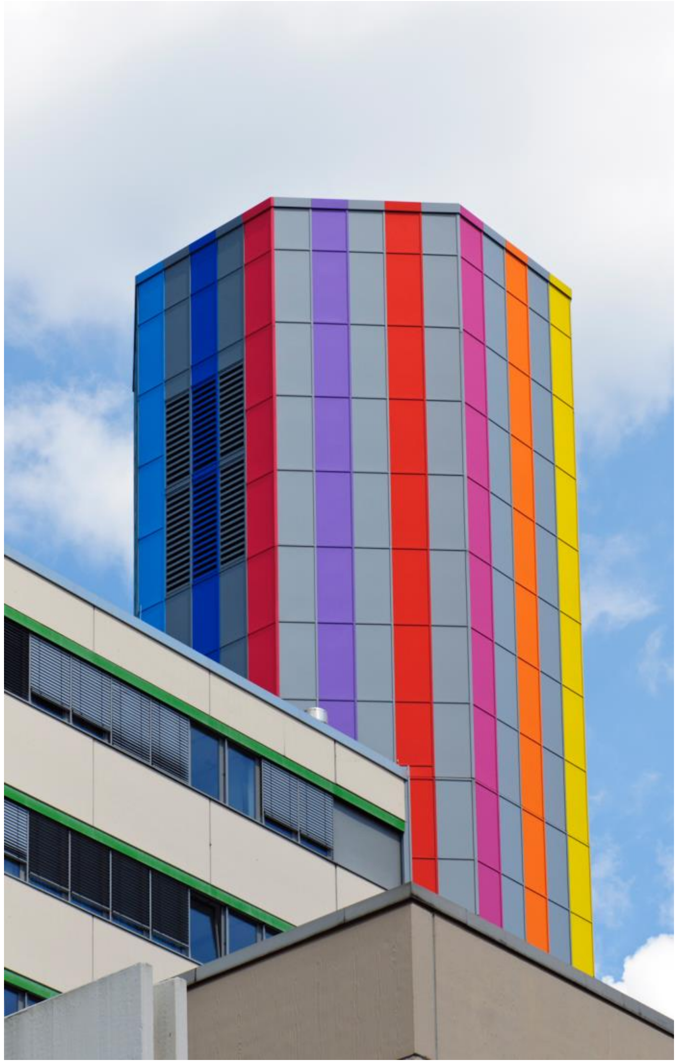
→ Keine einseitige Positionierung auf dem Kontinuum zwischen Werkzeug- und Fachsprache

- Manche Visualisierungen verfälschen das Wesentliche → Monster (Lakatos, 1979)

→ Das Versagen der Anschauung bewusst reflektieren

- Cognitive Load (Sweller et al., 2011) → So viel wie nötig, so wenig wie möglich

Vielen Dank für ihre Aufmerksamkeit!



- Fragen?
- Anregung?
- Kritik?

wieland.wilzek@uni-due.de

Literaturangaben

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

- Buchholtz, Nils; Behrens, Daniel (2014): "Anschaulichkeit" aus Sicht von Lehramtsstudierenden. Ein didaktisches Prinzip für lehramtsspezifische Lehrveranstaltungen in der Studieneingangsphase. In: *mathematica didacta* 37 (2), S. 137–162. Online verfügbar unter http://mathdid.ph-freiburg.de/documents/md_2014/md_2014_Buchholtz_Behrens_Anschaulichkeit.pdf, zuletzt geprüft am 05.03.2017.
- Dreyfus, T. (1994): Imagery and reasoning in mathematics and mathematics education. In: Selected Lectures from the Seventh International Congress on Mathematical Education. Quebec: Les Presses de l'Universite Laval: Sainte-Foi, S.107-122
- Lakatos, Imre (1979): Beweise und Widerlegungen. Die Logik mathematischer Entdeckungen. Braunschweig: Vieweg (Wissenschaftstheorie, Wissenschaft und Philosophie, 14).
- Michael, Berthold (1983): Darbieten und veranschaulichen. Möglichkeiten und Grenzen von Darbietung und Anschauung im Unterricht. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt (Erziehen und Unterrichten in der Schule).
- Pinkernell, Guido (2014): Studierende erklären Zusammenhänge zwischen dynamisch verbundenen Repräsentationen von Funktionen. In: Jürgen Roth (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Beiträge zur 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10. bis 14. März 2014 in Koblenz. Münster: WTM - Verl. für Wiss. Texte und Medien (2), S. 899–902.
- Schwank, Inge (2003): Einführung in prädikatives und funktionales Denken. In: ZDM 35 (3), S. 70–78.
- Sweller, John; Ayres, Paul; Kalyuga, Slava (2011): Cognitive Load Theory. 1. Aufl. New York, NY: Springer Science+Business Media LLC (Explorations in the Learning Sciences, Instructional Systems and Performance Technologies, 1).
- Tall, David; Vinner, Shlomo (1981): Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. In: Educational Studies in Mathematics 12 (2), S. 151–169.
- Volkert, Klaus Thomas (1986): Die Krise der Anschauung. Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850. Zugl.: Saarbrücken, Univ., Diss. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht (Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik, 3).
- Weigand, Hans-Georg; Weth, Thomas (2002): Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen. Heidelberg [u.a.]: Spektrum, Akad. Verl. (Mathematik Primar- und Sekundarstufe).