Ein Leben voller Brüche – Algebraische Terme von der Schule bis zur Uni und darüber hinaus

Dr. Jürgen Liedtke, Dozent am MINT-Kolleg

MINT-Kolleg Baden-Württemberg

Übersicht

Einleitung

Karlsruher Institut für Technologie

Aspekte der Bruchrechnung in der Praxis

- Rechenregeln beherrschen lernen ist wichtig
- Strukturen entdecken und wiedererkennen
- Anwendungen sehen

Erläuterung

Erklärungen

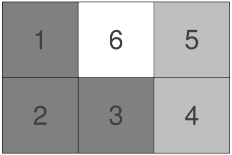
- Praktische Rechenpraxis erlangt man, indem viele Übungsaufgaben selbst mit „Bleistift und Papier“ gerechnet werden.
- Auch „typische Muster“ zu erkennen, bedarf eigener Übung!
- Dann gelingt es, in Anwendungen die benötigten Rechenregeln zu erkennen.

Brüche – Einfach betrachtet

Einfach neue Zahlen?

Rechnen mit Brüchen

- Mit Dezimalzahlen ist oft geläufig: $0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$, was mit Brüchen überraschend aussehen mag: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ wegen $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- Ein weiteres Beispiel: $0{,}5 + 0{,}3333\ldots = 0{,}8333\ldots$ bzw. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$



- Mit Brüchen gibt es auch für natürliche Zahlen viele Darstellungen:

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{12}{6} = \frac{100}{50} = \frac{110}{55} = \frac{200}{100}$$

Gewohnte Notationen

Darstellung und charakteristische Eigenschaften

Darstellung

- Beschreibung eines Bruches:
  Zwei Zahlen sind notwendig, um eine (neue) Zahl q zu notieren:

$$q = \frac{a}{b} \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$$

- Geometrische Veranschaulichung:
  Die genannte charakteristische Eigenschaft wird besonders in flächigen Darstellungen sichtbar, wie oben am Beispiel gezeigt.

Brüche als Beispiel besonderer mathematischer Strukturen

- Struktur wie bei komplexen Zahlen, Vektoren in der Ebene
- Struktur wie bei Umkehrabbildungen

Erläuterung

Brüche als ein Beispiel besonderer mathematischer Strukturen

- Eine komplexe Zahl z wird in der algebraischen Form mit zwei reellen Zahlen a und b gemäß
$$z = a + b\mathrm{i}$$
geschrieben, ein Vektor $v = (a \;\; b)^T$ in der Ebene durch zwei Komponenten a und b.
- Die Multiplikation mit einem Faktor c kann als Abbildung betrachtet werden, durch die x auf $c \cdot x$ abgebildet wird. Die Division mit $c \neq 0$ wird dann durch die Abbildung $x \mapsto \frac{1}{c} \cdot x$ beschrieben, der Umkehrabbildung zur eben genanten Abbildung.

Beispiele von Brüchen

Eine kleine Auswahl

- Prozentrechnung
- Goldener Schnitt
- Funktionseigenschaften
- Ableitung
- Konvergenzkriterien für Reihen
- Partialbruchzerlegung

Prozentrechnung

Beispiel 1

- Prozentrechnung ist angewandte Bruchrechnung
- Anteil A einer Gesamtheit G auf 100 Einheiten bezogen ist der Prozentsatz p, als Formel:

$$\frac{A}{G} = \frac{p}{100}$$

  und besonders aufgeschrieben: $\frac{p}{100} = p \cdot \frac{1}{100} = p\%$
- Beispiel: Indem die Zahl 1 als Quotient in der Form $1 = \frac{100}{100}$ geschrieben wird, ergibt sich beispielsweise

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{100}{100} = \frac{3 \cdot 100}{5} \cdot \frac{1}{100} = \frac{3 \cdot 20}{1} \cdot \frac{1}{100} = 60\%$$

Goldener Schnitt

Beispiel 2

In der Architektur werden immer wieder besondere Verhältnisse beobachtet.
Der „Goldene Schnitt“ φ kann als ein besonderes Längenverhältnis

$$\varphi := \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

zweier Längen a und b beschrieben werden. Aus $\varphi^2 = \varphi + 1$ und damit $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ folgt

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Beobachtung:

$$-\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Erläuterung

Karlsruher Institut für Technologie

Erklärung der Beobachtung

- Für die beiden Lösungen $\varphi_1 := \varphi$ und φ_2 der quadratischen Gleichung $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ gilt $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = -1$ nach dem Satz von Vieta.
- Damit ergibt aus $\varphi_2 = -\frac{1}{\varphi_1} = -\frac{1}{\varphi}$ nach Erweitern mit $1 - \sqrt{5}$ dann

$$\varphi_2 = -\frac{1}{\varphi} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})\cdot(1-\sqrt{5})} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Eigenschaften von Funktionen

Beispiel 3

Sei f eine reelle Funktion mit positiven Funktionswerten $f(x) > 0$.

Wachstumseigenschaft

f ist monoton fallend, wenn für $x < y$ mit $y = x + h$ dann $f(y) \leq f(x)$ oder gleichwertig $\frac{f(y)}{f(x)} = \frac{f(x+h)}{f(x)} \leq 1$ gilt.

Beispiel: Für f mit $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ ist $\frac{\mathrm{e}^{-x-h}}{\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{-h} = \frac{1}{\mathrm{e}^{h}} < 1$ für $h > 0$.

Anwendung

Die Monotonie rekursiv definierter Folgen (Funktionen auf $\mathbb{N}$) wird oft in dieser Weise festgestellt.

Beispiel

Sei $q > 0$. Für $a_0 = 1$ und $a_{n+1} := q \cdot a_n$ ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, wenn $q < 1$.

Ableitung

Beispiel 4a

Differenzenquotient einer Funktion f

Für x_0 und $x = x_0 + h$ und damit $x - x_0 = h$ ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Beispiel

Für f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $x_0 := 3$ ist für $h \neq 0, -3$ dann

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad &= \quad \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \frac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h} \\ &= \quad \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(3 + h) \cdot 3} = -\frac{1}{(3 + h) \cdot 3}\end{aligned}$$

Ableitung
Beispiel 4b

Zur Berechnung der Ableitung einer Funktion $\frac{u}{v}$ dient die

Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Beispiel

Für f mit $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = 1 + \tan^2(x) = 1 + (f(x))^2 \end{aligned}$$

Ableitung

Beispiel 4c

Zur Berechnung von gewissen Grenzwerten kann die Regel von de l'Hospital verwendet werden.

Voraussetzungen

- Funktion f ist als *Quotient* $\frac{g}{h}$ differenzierbarer Funktionen gegeben.
- Es streben g und h beide gegen 0 oder beide gegen ∞ für $x \to x_0$.

Beispiel

Für f mit $f(x) = x \cdot \ln(x)$ gilt

$$f(x) = x \cdot \ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

$$\text{und damit } \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$$

Erläuterung

Karlsruher Institut für Technologie

Erklärungen zum Beispiel

- Zuerst wird der erste Faktor als Bruch geschrieben: Es ist $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$.
- Damit sind die Voraussetzungen der Rechenregel von de l'Hospital erfüllt.
- Nach der Anwendung wird noch der Doppelbruch vereinfacht.

Konvergenzuntersuchung von Reihen

Beispiel 5

Sei $\sum a_n$ eine Reihe.

Vergleichskriterium

Seien $a_n > 0$ und $b_n > 0$. Wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \qquad \text{existiert und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$$

gilt, dann ist $\sum a_n$ genau dann absolut konvergent, wenn dies für $\sum b_n$ gilt.

Quotientenkriterium

Seien $a_n \neq 0$. Wenn

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \qquad \text{für fast alle } n$$

gilt, dann ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

Konvergenzuntersuchung von Reihen II

Beispiel 5 (Fortsetzung)

Für $\sum \frac{k+3}{2^k}$ mit $a_n = \frac{k+3}{2^k}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{k+1+3}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k+3} \quad &= \quad \frac{k+4}{k+3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \quad \frac{(k+3)+1}{k+3} \cdot \frac{1}{2} \\ &\leq \quad \left(1 + \frac{1}{0+3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

für fast alle n, sodass $\sum a_n$ absolut konvergent ist.

Partialbruchzerlegung

Beispiel 6

Sei f eine rationale Funktion mit

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{(x - x_0) \cdots (x - x_m)}$$

und Polynomfunktionen p und q mit $q(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_m)$.
Dann kann $f(x)$ als Summe von „elementaren“ rationalen Funktionstermen der Art

$$\frac{a_k}{(x - x_k)^{l_k}}$$

beschrieben werden.

Beispiel

$$\frac{6}{x^2 - 1} = \frac{3}{x - 1} - \frac{3}{x + 1} \qquad \text{für } x \neq 1 \text{ und } x \neq -1$$

Beobachtungen in der Unterrichtspraxis

Beispiele

Brüche werden immer wieder versteckt, vermieden oder „übersehen“.
Beispielsweise in

- Formeln
- Rechnungen
- scheinbaren Begründungen („Beweisirrtümern“)

Formeln scheinbar ohne Brüche

Beobachtungen 1

Diskontierung

Der Barwert einer jährlichen Zahlung B_0 ist

$$
\begin{aligned}
B &= B_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^k} \\
&= B_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+i)^k} \\
&= B_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} v^k
\end{aligned}
$$

mit $v := \frac{1}{(1+i)^k}$ und $i := \frac{p}{100}$

Vermeidung von Quotienten

Beobachtungen 2

Wurzelkriterium statt Quotientenkriterium zur Konvergenz

Es wird gerne

$$\sqrt[k]{|a_k|} \qquad \text{statt} \qquad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

betrachtet.

Ist beispielsweise $\sqrt[k]{\frac{1}{k+1}}$ wirklich rechnerisch einfacher als

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+2-2+1}{k+2} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

zu behandeln?

Anmerkung

Hier ergibt keines der genannten Kriterien eine Konvergenzaussage.

Beispiel zu Grenzwerten

Beobachtungen 3

Es wird teilweise nicht gesehen, dass Brüche eigenständige Zahlen sind. Hier ein Beispiel zu Grenzwerten:

Fehlerhafte Anwendungen der Grenzwertsätze

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, denn:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Also ist $1 = 0 \cdot \infty$?

Die Anwendung von Rechenregeln erfolgt im Beispiel nicht im richtigen Rahmen.

Erläuterung

Die Anwendung von Rechenregeln erfolgt im Beispiel nicht im richtigen Rahmen.

- Es ist möglich, $\frac{1}{n}$ kann als Quotient zweier Zahlen anzusehen. Ist dies für das Ziel hilfreich?
- Entscheidend ist, dass die Voraussetzungen der Grenzwertsätze nicht beachtet werden: *Beide* Folgen müssen konvergieren (und der Grenzwert der Folge im Nenner muss ungleich 0 sein).
- ∞ ist keine reelle Zahl, sodass der Quotient hier nicht definiert ist. Dies verdeutlicht die anschließende Frage der angeblichen Gleichheit.

Mögliche Folgerungen für den Unterricht an der Hochschule

Erfahrungen und Ideen

- Anfängliche Wiederholung von Rechenregeln wenig motivierend (da ja Neues erwartet wird)
- Umgang mit Brüchen im *Kontext* der Themen der Hochschulmathematik üben – dies gelingt oft erfolgreich
- Kombination mit Potenzen bietet viele „angewandte“ Übungsmöglichkeiten

Ausblick

Alltägliche Anwendungsbeispiele in den Naturwissenschaften

Grundlegende Rechentechniken in naturwissenschaftlichen und technischen Anwendungen – eine kleine Auswahl:

- Dimensionierung chemischer Reaktionen: Allgemeine Gasgleichung
- Optimale Arbeitsumgebungen für Computer: Widerstand eines Halbleiters
- Untersuchung chemischer Prozesse: Geschwindigkeit chemischer Reaktionen
- Versuchsplanung und statistische Auswertungen: Kombinatorik und Wahrscheinlichkeiten

Allgemeine Gasgleichung

Ausblick 1: Dimensionierung chemischer Reationen

Für die Dimensionierung einer chemischen Reaktion ist eine bestimmte Stoffmenge n vorzugeben, oder – als Reaktionsprodukt – zu bestimmen. Für Gase kann die Stoffmenge n einfach aus den messbaren Größen T, p und V mittels der allgemeinen Gasgleichung bestimmt werden.

- Allgemeine Gasgleichung:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

- Und wo sind hier die Brüche?
- Je nach Fragestellung oder experimenteller Betrachtung sind verschiedene Sichtweisen möglich, die durch Umformungen obiger Gleichung ausgedrückt werden.
- Es kann ein Wert einer Größe in Abhängigkeit der anderen Größen bestimmt oder der Zusammenhang zwischen zwei Größen betrachtet werden. Hierbei ist R eine Konstante.

Allgemeine Gasgleichung II

Ausblick 1 (Fortsetzung)

- Frage: Bei einer chemischen Reaktion entstehen 200 ml Wasserstoffgas bei Raumtemperatur T und Normaldruck p. Wie groß ist dessen Stoffmenge n?

$$n = \frac{p \cdot T}{R \cdot V}$$

- Experiment: Es wird ein gasförmiger Stoff betrachtet. Wie ändert sich das Volumen V einer bestimmten Stoffmenge n, wenn der Druck p bei konstanter Temperatur T variiert wird?

$$V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = (n \cdot R \cdot T) \cdot \frac{1}{p}$$

Die Bruchgleichung wird – sprachlich – als umgekehrt proportionaler Zusammenhang zwischen p und V bezeichnet.

Widerstand eines Halbleiters

Ausblick 2a: Optimale Arbeitsumgebungen für Computer

Halbleiter in elektronischen Bauteilen werden mit einer konstanten Spannung U versorgt. Ihr Widerstand R und damit der fließende Strom I ist von der Temperatur T abhängig.

- Widerstand R in Abhängigkeit der absoluten Temperatur T:

$$R(T) = R_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{b}{T}}$$

- Relative Änderung des Widerstands, wenn die Temperatur um ΔT steigt:

$$\frac{R(T+\Delta T)}{R(T)} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{b}{T+\Delta T}}}{\mathrm{e}^{\frac{b}{T}}} = \mathrm{e}^{\frac{b}{T+\Delta T}-\frac{b}{T}} = \mathrm{e}^{-\frac{b\cdot\Delta T}{T(T+\Delta T)}}$$

- Aus $U = R \cdot I$ ergibt sich die Stromstärke I zu

$$I = \frac{1}{R} \cdot U$$

Bei konstanter Spannung U steigt somit der Strom I, wenn T steigt.

Erläuterung

Folgerung aus dem Zusammenhang $I = \frac{1}{R} \cdot U$

- Mit steigender Temperatur T wird der Widerstand R im Halbleiter geringer.
- Das heißt, der Kehrwert $\frac{1}{R}$ wird größer.
- Bei konstanter Spannung U steigt somit die Stromstärke I, wenn die Temperatur T steigt.

  Dafür sind die Bauteile nur bedingt ausgelegt (es gibt eine maximale Stromstärke, bis zu der die Bauteile zuverlässig funktionsfähig sind).
- Salopp formuliert: Gekühlte Chips „leben länger".

Geschwindigkeit chemischer Reaktionen

Ausblick 2b: Untersuchung chemischer Prozesse

- Die Geschwindigkeit R einer chemischen Reaktion hängt von den Konzentrationen der Stoffe ab, zum Beispiel für $2H_2 + O_2 \to 2H_2O$ gemäß
$$R = k \cdot [H_2]^2 \cdot [O_2]$$
mit „Geschwindigkeitskonstante" k.
- Die Geschwindigkeitskonstante k hängt von der Aktivierungsenergie E_A und der Temperatur T ab (und einem Geometriefaktor A):
$$k = A \cdot \mathrm{e}^{-\frac{E_A}{R \cdot T}}$$

Beobachtung: Die mathematische Struktur dieser Formel ist zu obiger Formel für den Kehrwert des Widerstands
$$\frac{1}{R_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{b}{T}}} = \frac{1}{R_0} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{b}{T}}$$
vergleichbar.

Kombinatorik und Wahrscheinlichkeiten

Ausblick 3: Versuchsplanung und statistische Auswertung

Karlsruher Institut für Technologie

- Auswahl von k Objekten aus n:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(n-k) \cdots 1 \cdot k \cdots 1}$$

- Wahrscheinlichkeit einer solchen zufälligen Auswahl

$$\frac{1}{\binom{n}{k}}$$

- Beispiel: Sechs Richtige im Lotto?

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{\frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!}} = \frac{6!}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}$$

- Vereinfachen und Abschätzen führen zu einer Vorstellung, wie viele Möglichkeiten es gibt und somit wie klein die Wahrscheinlichkeit ist.

Zum Kontext des Vortrags

Quellen und Hinweise

- Bildungsplan 2016 für das Gymnasium in Baden-Württemberg
- Zertifikatsklausur 2016 zum Vertiefungsfach Mathematik in Baden-Württemberg
- Kurse des MINT-Kollegs Baden-Württemberg zur Vorbereitung und zum Einstieg in natur- und ingenieurwissenschaftliche Studiengänge
- Bild der Wissenschaft, Heft 2/2016, Themenschwerpunkt Lernen

MINT-Kolleg online unter

www.mint-kolleg.de

Baden-Württemberg

MINISTERIUM FÜR WISSENSCHAFT, FORSCHUNG UND KUNST

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

Dem Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg (Studienmodelle individueller Geschwindigkeit) und dem Bundesministerium für Bildung und Forschung (Qualitätspakt Lehre, FKZ 01PL11018A, 01PL11018B) danken wir herzlich für die finanzielle Unterstützung dieses Projekts.