

1 Projektthema: Programmiertechniken erkunden

Aufgabe 1.1 (Eingabe von Daten, Grafikfunktionen)

Entwickeln Sie ein Programm, das ein Quadrat mit Seitenlänge a zeichnet. Erweitern Sie Ihr Programm, sodass der Wert a und eine Ecke mittels Tastatur eingegeben werden können.

Aufgabe 1.2 (Rechnen mit Listen)

Erstellen Sie eine Liste x von Zahlen, die beispielsweise

- fortlaufend natürliche Zahlen mit einem individuell festgelegten Beginn und Ende,
- frei eingegebene Zahlen

enthält. Eine weitere Liste $nulleins$ soll ebenso oft die Zahlen 0 oder 1 enthalten, wodurch eine Auswahl beschrieben werden kann (1 bedeutet ausgewählt, 0 nicht ausgewählt).¹

Geben Sie die Summe und das (punktweise) Produkt der Listen aus. Bilden Sie anschließend die Summe aller Einträge des Produkts.²

Vorschlag zu einer Variante: Der Befehl `transpose` wandelt eine zeilenweise Liste in eine spaltenweise Liste um (und umgekehrt). Bilden Sie von $nulleins$ eine spaltenweise Liste $spne$. Dann kann das (Matrix-)Produkt $x * spne$ gebildet werden, das die Summe aller Produkteinträge von x und $spne$ ergibt (da x eine einzeilige Liste von Zahlen ist; bei mehrzeiligen Listen ergeben sich entsprechend mehrere Werte).

Aufgabe 1.3 (Optionen mittels Abfragen festlegen)

Bieten Sie ein Auswahlfenster an, um zwischen vier Gebietsformen Figuren auswählen zu können, die dann grafisch dargestellt werden (Beispiel für geometrische Formen: Kreis, Rechteck, Dreieck, Quadrat).

Aufgabe 1.4 (Zeitliche Entwicklungen mittels Schleifen beschreiben)

Erstellen Sie eine Abfolge von Bildern im Abstand von einer Sekunde, die eine Anzahl von Sternen zeigen, die sich jeweils verdoppelt (oder um beispielsweise 50 Prozent zunimmt).

Aufgabe 1.5 (Abläufe strukturieren)

Erfragen Sie schrittweise den Weg vom Bahnhof zum Treffpunkt. In jeder Antwort wird die Richtung (idealisiert: rechts, links (diagonal)) und die Länge der Teilstrecke angegeben.

¹Der Befehl `length` verwendet werden, um die Anzahl aller Einträge der Liste festzustellen.

²Auf diese Weise kann die Summe ausgewählter Einträge von x gebildet werden.

2 Projektthema: Auswertung experimenteller Daten

Es soll ein Programm erstellt werden, mit dem die Daten eines Experiments erfasst, grafisch dargestellt und ausgewertet werden können.

Für die Auswertung wird exemplarisch folgendes Modell für die Daten betrachtet:

$$y = s_0 \cdot 2^t$$

Die folgenden Aufgaben betrachten jeweils einen in sich abgeschlossenen Arbeitsschritt:

Aufgabe 2.1 (Datenerfassung)

Entwickeln Sie ein Programm, mit dem die vorliegenden Daten eingegeben werden können (zu jedem Zeitpunkt t der Bestandswert y).

Optional kann eine Möglichkeit vorgesehen werden, dass die Daten auch aus eine (Text-)Datei eingelesen werden können (Befehl load).

Aufgabe 2.2 (Datenkontrolle)

Geben Sie die Daten auf Wunsch am Bildschirm aus, damit diese kontrolliert werden können.

Aufgabe 2.3 (Grafische Darstellung)

Erstellen Sie mittels eines Programms eine grafische Darstellung der zuvor eingegebenen Daten.

Aufgabe 2.4 (Auswertungen)

Aus den Daten zu benachbarten Messzeitpunkten soll jeweils das Verhältnis berechnet werden. Außerdem soll der Mittelwert dieser Verhältnisse bestimmt werden.

Aufgabe 2.5 (Ergebnisdarstellung)

Stellen Sie die Daten als Balkendiagramm dar und kennzeichnen Sie den Mittelwert als Linie.

3 Projektthema: Visualisierungen

Aufgabe 3.1 (Figuren visualisieren, Näherungsdarstellungen)

Schreiben Sie ein Programm, das eine „Schlangenlinie“ mittels Polygonzügen näherungsweise konstruiert und zeichnet. Die Kreishögen können mit Hilfe von Ausschnitten regelmäßiger Vielecke konstruiert werden.

Aufgabe 3.2 (Geländedarstellungen und Höhenlinien)

Zeichnen Sie Höhenlinien einer viereckigen Pyramide und eines Daches sowie einer Halbkugel.

Aufgabe 3.3 (Muster erzeugen)

Zeichnen Sie einen farbigen Kreis (oder ein Dreieck). Erstellen Sie daraus ein Muster, indem Sie die Figur mehrfach verschieben und spiegeln.

Aufgabe 3.4 (zufälliger Sternenhimmel)

Färben Sie den Hintergrund Ihres Grafikfensters im oberen Teil blau, im schmalen unteren Teil rot. Zeichnen Sie auf diese Fläche zufällig verteilte Sterne.

Erweiterung: Erstellen Sie eine Variante Ihres Programms, das die Sterne schrittweise mit einer einstellbaren zeitlichen Verzögerung zeichnet, sodass sich eine Animation ergibt.

4 Projektthema: Experimentelle Mathematik

In Anwendungen mathematischer Methoden ist es immer wieder eine Kunst, ein geeignetes Berechnungsverfahren zu entwickeln, das in sinnvoller Näherung und akzeptabler Zeit mit den heutigen technischen Möglichkeiten ein numerisches Ergebnis liefert.

Beispielsweise ist die Integration von Funktionen mehrerer Variablen mittels Diskretisierungen schwierig durchführbar, wenn relativ viele Dimensionen zu berücksichtigen sind (wie dies in wirtschaftswissenschaftlichen Fragestellungen der Fall sein kann).

Verfahren mit (Pseudo-) Zufallszahlen sind dazu eine Möglichkeit. Die folgenden Aufgaben geben einen ersten Einblick in solche Monte-Carlo-Verfahren zur numerischen Berechnung.

Aufgabe 4.1 (Näherungsweise Berechnung der Kreiszahl)

Es wird ein Kreis K mit Radius r betrachtet, der in ein Quadrat Q mit Seitenlänge $a = 2r$ eingezeichnet ist. Der Flächeninhalt von K ist durch $A = \pi \cdot r^2$ mit der Kreiszahl π gegeben.³

Entwickeln Sie ein Programm, das die Kreiszahl π näherungsweise berechnet: Verteilen Sie dazu zufällig eine gewisse Anzahl z von Punkten im Quadrat Q . Zählen Sie dabei, wie viele Punkte innerhalb des Kreises mit Radius $r = 1$ gesetzt werden. Diese Zahl sei p . Dann ist $\frac{p}{z}$ ungefähr das Verhältnis der Kreisfläche zur Fläche des Quadrats, woraus sich ein Näherungswert für π ergibt.

Stellen Sie die näherungsweise Berechnung zeichnerisch (als Animation) dar.

Aufgabe 4.2 (Fläche näherungsweise berechnen)

Es soll der Inhalt einer Fläche näherungsweise berechnet werden, die durch zwei (Funktions-)Graphen berandet wird: Betrachten Sie die Fläche innerhalb eines Rechtecks bekannter Größe und setzen Sie zufällig Punkte in die Fläche. Die Anzahl A der Punkte innerhalb der Fläche zur Gesamtzahl G verhält sich ungefähr wie die Flächeninhalte.

Testen Sie Ihr Programm mit

1. $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = (x - 2)^2$ für $5 < x < 8$

2. $f(x) = \sin(4x)$ und $g(x) = 0$ für $0 < x < \pi$

Aufgabe 4.3 (Logarithmus näherungsweise berechnen)

Für den natürlichen Logarithmus $\ln(t)$ gilt $\ln(t) = \int_1^t \frac{1}{\tau} d\tau$. Damit ergibt eine (näherungsweise) Berechnung des Flächeninhalts zwischen dem Graphen von $f : [1, t] \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow \frac{1}{t}$ und der horizontalen Achse den Wert $\ln(t)$.

Entwerfen Sie ein Programm, das auf diese Weise den Logarithmus $\ln(t)$ zu einer Zahl $t > 1$ näherungsweise berechnet.

³Die Kreiszahl π gibt das Verhältnis von Umfang und Durchmesser eines Kreises K an.